Vol. 11, No 1, Spring & Summer 2021 ISSN(Print): 2251-6360 ISSN(Online): 2423-4273

**Foundations of Education**

https://fedu.um.ac.ir

Reaserch Article DOI: 10.22067/fedu.2022.67302.0



# Learning of Mathematical Analysis Based on the Integration of Philosophical Analysis and Neurocognitive Findings of Symbolic Mathematics

A'zam Taherkhani[1], Saeid Zarghami-Hamrah[2], Hasan Ashayerih[3], Yahya Ghaedi[4]

Recived: 7/1/2021 Accepted: 13/11/2021

**Abstract**

The main purpose of this paper is to investigate the learning of mathematical analysis based on the integration of philosophical analysis and neurocognitive findings. For this purpose, learning mathematical analysis, as one of the aspects of mathematical thinking, has been studied using learning numerical symbols in children based on the neurophilosophical method. To that end, three observational propositions have been deduced from cognitive neuroscience findings on symbolic mathematics: symbolic learning of numbers changes children's brains; the processing of symbolic numbers and nonsymbolic numbers are heterogeneous and there is a vague, bidirectional connection between them; the symbolic knowledge of numbers plays an important role in the future development of children in higher-level mathematics. Then, based on these three propositions, an attempt has been made to examine the philosophical questions of the research and the challenges related to them.

In this paper, we argue that combining symbolic numbers learning with the knowledge of how numerical symbols are created and encouraging children to make consistent connections between numerical symbols and their mental meaning and verbal expression can provide the necessary grounds for the enrichment of metacognitive abilities such as error detection. However, it is necessary to consider challenges such as how children become acquainted with the theory of evolution taking into account cultural issues, the type of strategies needed to improve the relationship between semantic and symbolic understanding of numbers in children, and the level of emphasis on problem-solving processes (which also requires symbol-based analysis) in mathematics' education in Iran to improve children's thinking abilities.

**Keywords**: Learning of mathematical analysis; Philosophical analysis; Cognitive neuroscience; Symbolic number processing

**Citation:** Taherkhani, A., Zarghami-Hamrah, S., Ashayerih, H., Ghaedi, Y. (2022). Learning of Mathematical Analysis Based on the Integration of Philosophical Analysis and Neurocognitive Findings of Symbolic Mathematics. *Foundations of Education*, 11(1), 86-110. doi: 10.22067/fedu.2022.67302.0

1 . PhD Student, Kharazmi University, Tehran, Iran
2 . Asociate Prof., Kharazmi University, (Corresponding Author), Email: s.zarghami@khu.ac.ir
3 . Professor, Iran University of Medical Sciences, Tehran, Iran
4 . Asociate Prof., Kharazmi University

**پژوهشنامه مبانی تعلیم وتربیت**

https://fedu.um.ac.ir

| مقاله پژوهشی | DOI: 10.22067/fedu.2022.67302.0 | دسترسی آزاد |
| --- | --- | --- |

# یادگیری تحلیل ریاضیاتی مبتنی بر تلفیق تحلیل فلسفی و یافته‌های علوم اعصاب شناختی پیرامون ریاضیات نمادین[1]

اعظم طاهرخانی[2]، سعید ضرغامی همراه[3]، حسن عشایری[4]، یحیی قائدی[5]

تاریخ دریافت: ۹۹/۱۰/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۲۲

## چکیده

هدف اصلی این پژوهش تبیین یادگیری تحلیل ریاضیاتی مبتنی بر تلفیق تحلیل فلسفی و یافته‌های علوم اعصاب شناختی است. بدین منظور یادگیری تحلیل ریاضیاتی، به عنوان یکی از جنبه‌های تفکر ریاضیاتی، مبتنی بر یادگیری نمادهای عددی در کودکان با بهره‌گیری از روش عصب–فلسفی بررسی شده است. بر این اساس سه گزاره مشاهده‌ای که نتایج پژوهش‌های علوم اعصاب شناختی پیرامون ریاضیات نمادین است اخذ شده است. این گزاره‌ها عبارت‌اند از: یادگیری نمادین اعداد در کودکان، مغز را تغییر می‌دهد؛ پردازش اعداد نمادین و اعداد غیرنمادین به صورتی ناهمسان است و ارتباطی مبهم و دوسویه بین آن‌ها وجود دارد؛ دانش نمادین عدد، نقش مهمی در پیشرفت‌های آینده کودکان در ریاضیات سطح بالاتر دارد. بر مبنای این سه گزاره تلاش شده است تا پرسش‌های فلسفی پژوهش و چالش‌های مرتبط با آن‌ها بررسی شود. نتایج این پژوهش حاکی از آن است که همراه شدن یادگیری اعداد نمادین با چگونگی به وجود آمدن نمادهای عددی و تشویق کودکان به ایجاد ارتباط پیاپی بین نمادهای عددی و معنای ذهنی و بیان کلامی آن‌ها می‌تواند اسباب لازم برای غنای توانایی‌های فراشناختی مانند تشخیص خطاها را فراهم کند. اما لازم است چالش‌هایی مانند چگونگی آشنایی کودکان با نظریه تکامل با توجه به مسائل فرهنگی، نوع راهبردهای لازم برای بهبود ارتباط درک معنایی و نمادین اعداد در کودکان و سطح تأکید بر فرآیندهای حل مسئله (که نیازمند تحلیل مبتنی بر نمادها هستند) در برنامه‌های آموزش ریاضی به منظور بهبود توانایی‌های تفکر کودکان بررسی شود.

**واژه‌های کلیدی**: یادگیری تحلیل ریاضیاتی، تحلیل فلسفی، علوم اعصاب شناختی، پردازش نمادین عدد

---

۱. برگرفته از رساله دکتری در دانشگاه خوارزمی با عنوان «تحلیل مؤلفه‌های فلسفی یادگیری تفکر ریاضیاتی بر بنیان عصب–فلسفه» است.

۲. دانشجو دکتری فلسفه تعلیم و تربیت، دانشگاه خوارزمی،azamtaherkhani@gmail.com

۳. دانشیار فلسفه تعلیم و تربیت، دانشگاه خوارزمی، (نویسنده مسئول)، s.zarghami@khu.ac.ir

۴. استاد دانشکده توان‌بخشی، دانشگاه علوم پزشکی ایران

۵. دانشیار فلسفه تعلیم و تربیت، دانشگاه خوارزمی

**مقدمه**

آموزش و یادگیری ریاضیات همواره از مسائل مهم در تعلیم و تربیت بوده است. یکی از جنبه‌های مهم یادگیری ریاضیات، یادگیری تفکر ریاضیاتی[1] است که کمتر مورد توجه قرار گرفته است. همان طور که برخی از پژوهشگران این حوزه اشاره کرده‌اند هر نوع تفکری ازجمله تفکر ریاضیاتی مبتنی بر پنج رویه‌ی فلسفی عمده است. مارتنز معتقد است که تفکر بر مبنای پنج روش بنیادین فلسفی صورت می‌پذیرد (Martens, 2003). این رویکردها عبارت‌اند از: فلسفه تحلیلی، هرمنوتیک، دیالکتیک، پدیدارشناسی و فلسفه نظرورزانه[2] (Paravicini, Schnieder, & Scharlau, 2018)؛ اما به نظر می‌رسد به پژوهش‌های بیشتری برای آشکارسازی جنبه‌های پنهان تفکر ریاضیاتی نیاز است. از سوی دیگر، پژوهش‌های بسیاری از سوی دانشمندان علوم اعصاب شناختی پیرامون یادگیری ریاضیات انجام شده است. یاری‌گرفتن از یافته‌های این پژوهش‌ها می‌تواند برای فهم بهتر جنبه‌های پنهان تفکر ریاضیاتی، به ویژه یادگیری تحلیل ریاضیاتی که مورد توجه این پژوهش است، سودمند باشد.

بررسی رویکردها و روش‌های اندیشیدن، در بستر ریاضیات، ازآن‌رو اهمیت می‌یابد که نتایج آزمون تیمز[3] نشان داده است که مهارت‌های ریاضیاتی دانش آموزان ایرانی پایین‌تر از متوسط جهانی است (Richardson et al., 2020). دانش‌آموزان ایرانی در تحلیل، فهم، آشکارسازی خطاها، توصیف و نظرورزی در زمینه ریاضیات مشکلات بسیاری دارند و این امر نشان‌دهنده چند چالش اساسی است. نخست چالش در یادگیری ریاضیات مدرسه، کسب نمره پایین و نتایج روانی آن است که معلمان شاهد آن هستند. این درحالی است که کاهش اعتمادبه‌نفس و برچسب خوردن افرادی که در درک ریاضیات و حل مسائل آن مشکل دارند از اثرات مخرب آموزش نادرست ریاضیات است (Ernest, 2018). چالش دوم به ضعیف شدن صنعت کشور که وابسته به ریاضیات است بازمی‌گردد و چالش سوم با خارج شدن ریاضیات از مبانی فکری کودکان مرتبط است. ریاضیات می‌تواند وسیله‌ای برای غنای تفکر انسانی باشد. به تعبیر دیگر هدف از آموزش ریاضی، آموزش قضاوت اجتماعی است (Gutstein, 2018). ریاضیات می‌بایست بر اساس آموزش استدلال معنادار به اهداف خود برسد و در غیر این صورت تفکری بدون اخلاق در کودکان خلق می‌شود که حتی در صورت ریاضی‌دان شدن افراد، آن‌ها به ابزارهایی برای کسب قدرت تبدیل می‌شوند (Ernest, 2018).

به نظر می‌رسد یکی از شیوه‌های رویارویی با چنین مشکلاتی، بهره‌گیری از تأمل فلسفی است؛ زیرا

1. Mathematical Thinking
2. Speculative Philosophy
3.Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)

تأمل فلسفی می‌تواند به آشکار شدن زوایای مختلف موضوعات یاری رساند. تبیین ژرف آموزش تفکر ریاضیاتی مبتنی بر همه روش‌شناسی‌های فلسفی پیش‌گفته در قالب یک مقاله ناممکن است؛ ازاین‌رو در این مقاله یکی از آن رویکردها انتخاب و بررسی شده است. ازآنجایی‌که این پژوهش بیشتر بر سنین آغازین دبستان متمرکز است و در این سنین کار با نمادهای عددی آغاز می‌شود؛ رویکرد تحلیلی مورد توجه قرار گرفته است. تفکر تحلیلی مستلزم تحلیل دقیق و جامع مفاهیم مرتبط با متن و تصویر مسائل ریاضی است. اما آنچه مبهم می‌نماید، فرآیند چنین تفکری است. چگونه می‌توان فرآیند این نوع تفکر را تبیین و سپس تسهیل کرد؟ چگونه می‌توان زمینه یادگیری تفکر تحلیلی را فراهم کرد؟ اینکه تا چه اندازه می‌توان به این پرسش‌ها پاسخ گفت نیازمند همکاری حوزه‌های دانشی گوناگون است.

دی اسمیت و همکاران معتقدند که حرکت رفت‌وبرگشت از علوم اعصاب شناختی[1] به آموزش ریاضی می‌تواند به درک بهتری از چگونگی وقوع یادگیری ریاضیات منجر شود (De Smedt et al., 2010). علوم اعصاب شناختی به دنبال یافتن پیوندهای ساده و مستقیم بین مغز و رفتار (Raizada et al., 2010) و آشکارسازی چگونگی توانمند شدن ذهن به‌واسطه مغز (Gazzaniga, 2009) است. انتظار غیرواقعی از نقش‌آفرینی مستقیم و مؤثر علوم اعصاب بر تربیت، مشکلات روش‌شناختی، بی‌توجهی به همبسته‌های نورونی[2] در فرایند یادگیری (Ansari, Coch, & De Smedt, 2011; Ansari, De Smedt, & Grabner, 2012b)، بهره‌گیری ناروا از یافته‌های تجربی مرتبط از سوی سیاستگزاران آموزشی (Thomas, Ansari, & Knowland, 2019)، اختلافات ایدئولوژیکی، مشکل تثبیت استانداردهای علم تربیت (Lagemann, 2002)، چالش‌های اخلاقی مرتبط با ارتباط بین‌رشته‌ای (Ansari et al., 2012b) و نیز بی‌توجهی به پرسش‌های اساسی فلسفی (Ansari, Coch, et al., 2011) مشکلات بسیاری برای اثربخشی عصب-تربیت[3] در عمل ایجاد کرده است. کیم و سنکی بر این باورند که به دلیل نقش‌آفرینی بسیار زیاد یافته‌های علوم اعصاب بر باورهای معلمان و به وجود آمدن افسانه‌های عصبی[4] در تعلیم و تربیت، ضروری است که پژوهش و کاربرد علوم اعصاب در علوم تربیتی تنها به دانشمندان علوم اعصاب واگذار نشود و فیلسوفان تربیت به صورت فعال در این امر مشارکت کنند (Kim & Sankey, 2018).

به تعبیر دیگر تعاملی دوسویه بین عصب شناسان و مربیان ضروری است (Ansari, 2005) و این امر آموزش هر دو گروه و اتخاذ نگاهی غیرفروکاست‌گرایانه به سطوح مختلف (Ansari & Coch, 2006; De

1. Cognitive Neuroscience
2. Neuronal Correlates
3. Neuroeducation
4. Neuromyths

(Smedt et al., 2011) و طرح پرسش‌های به حرکت در آورنده از سوی مربیان (Ansari, Coch, et al., 2011) را می‌طلبد. استفاده از یافته‌های علوم اعصاب شناختی می‌تواند معلمان را با تکیه‌بر شکل‌پذیری[1] مغز کودکان به معماران مغز تبدیل کند به شرطی که از محدودیت‌های استفاده از چنین یافته‌هایی آگاه باشند (Blakemore & Frith, 2005; Brault Foisy, Matejko, Ansari, & Masson, 2020). ایجاد این آگاهی نیازمند آموزش معلمان و مربیان است.

در همین راستا اهمیت ریاضیات باعث همکاری و پیوند پژوهشگران علوم تربیتی و علوم اعصاب شناختی در فهم خاستگاه‌های تحول عددی و ریاضیاتی غیرعادی[2] و حساب نارسایی[3] شده است (Ansari et al., 2012b; De Smedt et al., 2010; Grabner & Ansari, 2010). سرعت افزایش فهم خاستگاه‌های تکاملی[4]، بنیادهای انتوژنتیک[5] و ردگیری‌ها و همبسته‌های نورونی پردازش عدد؛ این پیوند را نویدبخش‌تر کرده است (Ansari et al., 2012b). ازآنجایی‌که روشن ساختن ماهیت تفکر ریاضیاتی یکی از مسائل مهم میان‌رشته‌ای این حوزه است (Alcock et al., 2016) می‌توان از یافته‌های این قبیل پژوهش‌ها برای تبیین جنبه‌های پنهان تفکر ریاضیاتی بهره برد.

بر اساس آنچه تاکنون گفته شد، از یک‌سو تحلیل ریاضیاتی به عنوان یکی از مؤلفه‌های فلسفی تفکر ریاضیاتی و از سوی دیگر یافته‌های علوم اعصاب شناختی پیرامون تحلیل و ریاضیات نمادین با تمامی اهمیت و نفوذ خود مورد توجه این پژوهش است. به باور نویسندگان این مقاله در کنار همه رویکردهای نظری برای پاسخگویی به پرسش‌های فلسفی تربیت، بهره‌گیری از یافته‌های تجربی نیز ضرورت دارد. پژوهش‌هایی که شامل هر دو عنصر مذکور باشند از سوی فیلسوفان تربیت قابل‌پیگیری است؛ چراکه چنین پژوهش‌هایی نیازمند تسلط بر رویکردهای فلسفی و مسائل تربیتی است. برای پیگیری چنین رویه‌ای؛ این پژوهش به دنبال بررسی یادگیری تحلیل ریاضیاتی با استفاده از روش عصب–فلسفه[6] است. ازاین‌رو می‌توان پرسش‌های موردبررسی در این مقاله را به شرح زیر صورت‌بندی کرد.

۱. تحلیل ریاضیاتی مبتنی بر سنت تحلیل فلسفی و یافته‌های علوم اعصاب شناختی به چه معناست و چگونه می‌توان به یادگیری آن سهولت بخشید؟

۲. چه چالش‌هایی برای منجر شدن یادگیری تحلیل ریاضیاتی به تفکر ریاضیاتی سطح بالاتر وجود دارد؟

---

1. Plasticity
2. Atypical
3. Dyscalculia
4. Evolutionary Origins
5. Ontogenetic Foundations
6. Neurophilosophy

## روش پژوهش

ازآنجایی‌که یکی از عوامل ناکامی استفاده از یافته‌های علوم اعصاب شناختی در علوم تربیتی، نبود زبان مشترک بین طرفین (Dick et al., 2014; van der Meulen, Krabbendam, & de Ruyter, 2015) و مشکل در برقراری ارتباط کارا بین معلمان و حوزه‌های پژوهشی است (Amiel & Tan, 2019)؛ نیازمند ایجاد این زبان مشترک هستیم. از سوی دیگر بدون انجام پژوهش‌هایی مبتنی بر روشی عصب-فلسفی چنین زبانی حاصل نمی‌آید. به‌عبارت‌دیگر، برای ایجاد زبان مشترک می‌بایست فیلسوفان تربیت وارد این حوزه شوند تا با انجام سلسله پژوهش‌هایی بتوان این زبان را ایجاد کرد. نبود این زبان مشترک، مشکلات بسیاری برای انجام این پژوهش ایجاد کرد. ایجاد زبان مشترک بین حوزه‌های مطالعاتی مطرح‌شده، راه را برای انجام پژوهش‌های قابل کاربست در مسائل و چالش‌های تربیتی می‌گشاید. به بیانی دیگر، انتخاب روش عصب-فلسفه برای پژوهش حاضر به دلیل آن است که با وجود احتمال سودمند بودن یافته‌های تجربی (علوم اعصاب شناختی) در تبیین و حل مسائل تربیتی، نمی‌توان به صورت مستقیم از آن‌ها استفاده کرد.

از یک سو در تبیین چالش‌های یادگیری تحلیل ریاضیاتی، به یافته‌های تجربی نیازمندیم چراکه به نظر می‌رسد تلاش‌ها برای بهبود یادگیری ریاضیات بر مبنای انواع پژوهش‌هایی که تاکنون صورت گرفته نتیجه‌بخش نبوده است. نتایج پژوهش‌های علوم اعصاب شناختی ممکن است بتواند راه‌های جدیدی برای بهبود یادگیری ریاضیات و به‌ویژه یادگیری تحلیل ریاضیاتی ارائه دهد. کلارک[1] بر این باور است که یادگیری در مرکز مسائل تربیتی قرار دارد. بااین‌وجود فیلسوفان تربیت فهم کمی از آن دارند و یافته‌های علوم اعصاب شناختی می‌تواند به فهم بیشتر آن کمک کند (Clark, 2009). اما از سوی دیگر این‌گونه به نظر می‌رسد که دستیابی به راهکارهای مؤثر برای بهبود توانایی تحلیلی ریاضیاتی تنها با اتکا بر یافته‌های علوم اعصاب شناختی امکان‌پذیر نباشد و نیاز است تا این یافته‌ها در زمینه‌ای فلسفی قرار گیرند تا امکان و شرایط بهره‌گیری از آن‌ها در متن تعلیم و تربیت بررسی شود. بر این اساس استفاده از یافته‌های علوم اعصاب شناختی، یکی از ابزارهای علوم تربیتی و به ویژه فلسفه تربیت خواهد بود. بر این اساس برای تلفیق تحلیل فلسفی و یافته‌های علوم اعصاب شناختی به منظور تبیین یادگیری تحلیل ریاضیاتی از روش عصب-فلسفه استفاده می‌شود تا بتوان دو حیطه عصبی و فلسفی را به هم پیوند داد. اما این روش با رویکرد فلسفی که توسط پاتریشیا چرچلند (1989) با نگاشتن کتاب *عصب-فلسفه*، مدون شد تفاوت‌هایی دارد.

چرچلند تلاش کرد تا فلسفه را به متخصصان علوم اعصاب و مهم‌تر از آن، علوم اعصاب را به

1. Clark

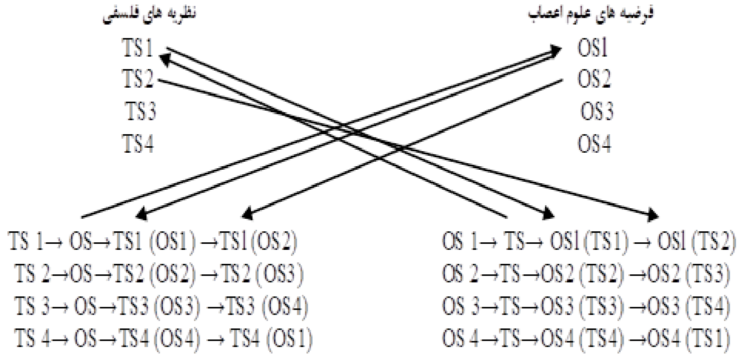
فیلسوفان معرفی کند و در این مسیر استدلال‌هایی در سه جهت اصلی بیان کند که عبارت‌اند از: «(۱) فرآیندهای ذهنی، فرآیندهای مغزی هستند، (۲) چارچوب نظری حاصل از تکامل هم‌زمان علوم اعصاب و روانشناسی، برتری روانشناسی عامه[1] را محدود می‌کند و (۳) بعید به نظر می‌رسد که بدون دانستن جزئیات بسیاری از ساختار و سازمان سیستم‌های عصبی بتوانیم نظریه شایسته‌ای از ذهن–مغز ارائه دهیم» (Churchland, 1989, p. 482). البته از منظری تعدیل‌یافته‌تر از دیدگاه چرچلند «عصب–فلسفه تأثیر یافته–های علوم اعصاب را بر گستره‌ای از پرسش‌های سنتی فلسفی کنکاش می‌کند. ... پرسش‌هایی همچون ماهیت دانش و یادگیری، تصمیم‌گیری و انتخاب، همچنین خودکنترلی و عادت‌ها، به واسطه یافته‌هایی از علوم مرتبط– نه تنها علوم اعصاب و عصب‌شناسی بالینی، بلکه زیست‌شناسی تکاملی[2]، روانشناسی تجربی، اقتصاد رفتاری، مردم‌شناسی و ژنتیک» (Churchland, 2017, p. 72).

بیکل در رویکردی متفاوت بر این باور است که عصب–فلسفه‌ی فروکاست‌گرایانه چرچلند (فروکاستن ذهن به مغز) با وجود استقبال اولیه، درنهایت حتی با تعدیل‌هایی که در آن صورت گرفت، نتوانست به‌عنوان نگرشی فلسفی در بین بسیاری از فیلسوفانِ پذیرفته شود و درنهایت به رویکردی روشی در فلسفه‌علم تبدیل شد (Bickle, 2019). اما نورثف با نگاه خوش‌بینانه‌تری به عصب–فلسفه پرداخته و از عصب–فلسفه گسترده[3] در مقابل نوع محدود[4] آن دفاع کرده است. مفاهیم هستی‌شناختی و معرفت‌شناختی بر بستر عصب–فلسفه گسترده با رویکردی غیرفروکاهشی و غیر حذفی تبیین می‌شوند و از دریچه روش–شناختی به ورای مغز نیز توجه می‌شود (Northoff, 2018). در این رویکرد ظرفیت‌های معرفت‌شناختی مغز را می‌توان به عنوان نقطه آغازین پژوهش‌های معرفت‌شناسانه بعدی دانست (Northoff, 2004).

مبتنی بر چنین دیدگاهی می‌توان عصب–فلسفه را به عنوان روشی برای انجام نوعی از پژوهش‌های فیلسوفان تربیت که درصدد بهره‌گیری از یافته‌های علوم اعصاب و به ویژه علوم اعصاب شناختی هستند برگزید. بر این اساس در این پژوهش، عصب–فلسفه گسترده به عنوان روشی در فلسفه‌علم (به صورت عام) و فلسفه تربیت (به صورت خاص) مورد توجه قرار گرفته است تا بتوان مبتنی بر این رویکرد به این مهم دست‌یافت. به باور کلارک فیلسوفان تربیت بر مبنای عصب–فلسفه می‌توانند هنگام شکاف بین دستاوردهای علوم اعصاب و تبیین‌های روانشناسی عامه پیرامون مسائل تربیتی به تحلیل و بررسی مفروضات فلسفی دو نظریه رقیب بپردازند تا مشخص کنند که کدام‌یک شایستگی و سودمندی بیشتری برای حل مسائل تربیتی

1. Folk Psychology
2. Evolutionary
3. Wide
4. Narrow

دارند (Clark, 2015). همان‌گونه که در نمودار ۱ نشان داده شده است؛ در روش تحلیل عصب–فلسفی، رفت‌وبرگشت‌هایی بین گزاره‌های نظری و مشاهده‌ای صورت می‌گیرد تا تبیینی میان‌رشته‌ای حاصل شود.




**نمودار ۱: تعامل بین گزاره‌های نظری (TS) و گزاره‌های مشاهده‌ای (OS) (Northoff, 2004, p. 101)**

بر اساس این روش، برای انجام پژوهش می‌توان از یک سو یافته‌های علوم اعصاب شناختی را در معرض تأملات فلسفی قرار داد و از سوی دیگر نظریه‌پردازی‌ها را به محک یافته‌های تجربی سپرد. با ایجاد گفتمانی بین این دو جریان می‌توان پرسش‌های مطرح‌شده پیرامون یادگیری تحلیل ریاضیاتی را تبیین کرد و تا حد امکان پاسخ گفت. اما مهم‌تر از پاسخ‌های فراهم آمده، پرسش‌های برآمده از این نوع پژوهش‌هاست که می‌تواند هم برای فیلسوفان تربیت و هم دانشمندان علوم اعصاب شناختی حرکت آفرین باشد. بر این اساس در بخش‌های بعد، ابتدا ارتباط عمیق بین تحلیل و ریاضیات نمادین شرح داده می‌شود تا بنیانی فلسفی برای بهره‌گیری از یافته‌های علوم اعصاب شناختی پیرامون یادگیری تحلیل ریاضیاتی فراهم آید. سپس بر این مبنا تحلیل عصب–فلسفی پیرامون یادگیری تحلیل ریاضیاتی انجام می‌شود. چارچوب روشی برای تحلیل عصب–فلسفی یادگیری تحلیل ریاضیاتی شامل گام‌های زیر است.

۱. مشخص کردن دامنه مورد نظر در تحلیل ریاضیاتی؛ در این پژوهش ریاضیات نمادین به ویژه نمادهای عددی مورد توجه قرار گرفته است.

۲. مشخص کردن گزاره‌های مشاهده‌ای؛ در این پژوهش گزاره‌های مشاهدتی با استفاده از بررسی بیش از هفتاد پژوهش تجربی در حوزه علوم اعصاب شناختی پیرامون ریاضیات نمادین به دست آمده‌اند. اغلب این پژوهش‌ها توسط انصاری و همکارانش در آزمایشگاه‌های تصویربرداری مغز انجام شده‌اند. درنهایت سه گزاره کلی از گزاره‌های مشاهدتی به دست آمده استنتاج شده است.

۳. استفاده از گزاره‌های مشاهده‌ای به دست آمده برای پاسخگویی به پرسش‌های فلسفی پژوهش: هر

کدام از سه گزاره استنتاج شده به صورت جداگانه برای پاسخگویی به پرسش‌های مطرح‌شده بررسی شده‌اند.

۴. مشخص کردن چالش‌های پیش رو برای یادگیری تحلیل ریاضیاتی

## ارتباط تحلیل و ریاضیات نمادین

فیلسوفان بزرگ تحلیلی مانند فرگه و راسل ریاضیدان بوده‌اند. پژوهش این فیلسوف-ریاضیدانان پیرامون بنیادهای ریاضیات از شکل‌گیری فلسفه تحلیلی و تحلیل فلسفی جدا نبوده است (Paravicini et al., 2018). راسل با نظریات و نگارش کتاب خود پیرامون تاریخ فلسفه و رد فلسفه ریاضیات ایدئالیستی، یکی از بانیان فلسفه تحلیلی است (Heis, 2017). جریان فکری راسلی در پی بهره‌گیری از ابزارهای صوری و ریاضیاتی و نزدیکی به علوم تجربی است. راسل تحلیل را به عنوان فرآیندی ترجمه‌ای[1] یا تفسیری[2] مورد توجه قرار داد. او معتقد بود فرد در فرآیند تحلیل ابتدا مفهوم را به زبانی صوری تبدیل کرده و سپس مورد بررسی قرار می‌دهد (Novaes & Geerdink, 2017). نمادها در این نوع تحلیل از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. نمادها در ریاضیات واسطه‌ای هستند میان ذهن و زبان. از سوی دیگر ریاضیات ایدئالیستی بر اساس پژوهش‌های عصب‌شناختی دوهان نیز به چالش کشیده شد. بر این اساس، اشیاء ریاضی (مانند اعداد) از پیش موجود نیستند بلکه بر بنیان سیستم‌های زیستی انسان و با تعامل با جهان فیزیکی ساخته می‌شوند (Dehaene, 2011).

استدلال نمادین در عملکرد ریاضیدانان مشهود است (Alcock et al., 2016) و ازآنجایی‌که فهم فرآیندهای ذهنی ریاضیدانان می‌تواند چراغ راهی برای آموزش ریاضیات، به ویژه تحلیل ریاضیاتی باشد؛ توجه به استدلال نمادین اهمیت بالایی پیدا می‌کند. روش تحلیلی (فرآیند ترجمه‌ای مبتنی بر نمادها) در فرآیند اثبات مسائل ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارد؛ هم به منظور فهم اثبات‌های پیشین و هم برای ارائه اثبات های جدید.

یکی از مهم‌ترین روش‌ها برای فهم اثبات، تحلیل خط به خط آن است. ازآنجایی‌که «اثبات قلب ریاضیات است» (Hodds, Alcock, & Inglis, 2014, p. 63)، تحلیل اهمیت ویژه‌ای در تفکر ریاضیاتی دارد. برای اثبات کردن قضیه‌ای در ریاضیات نیازمند نمادها هستیم زیرا مسئله بدون استفاده از نمادها، کلیت لازم را به دست نمی‌آورد. صورت‌مسئله ابتدا فهمیده، سپس تبدیل به نمادها شده و پس از آن دست‌کاری

1. Transformative
2. Interpretive

و درنهایت به نتیجه رسیده و با واژگان بیان می‌شود. این در حالی است که در سال‌های اخیر چگونگی دست‌کاری نمادها مورد توجه پژوهش‌های علوم اعصاب شناختی ریاضیاتی قرار گرفته است.

دانش عددی نمادین، توانایی‌های ریاضیاتی رسمی و غیررسمی را به یکدیگر پیوند می‌دهد (Merkley & Ansari, 2016). اولین نمادهایی که کودکان در ریاضیات می‌آموزند نمادهای عددی هستند که مانند هر زیربنای دیگری از اهمیت بسیار برخوردارند. اینکه پیش از یادگیری نمادهای عددی، شرایط ذهنی کودک چگونه است و چه اثری بر یادگیری بر جای می‌گذارد و چه مداخلاتی در این دوره و همچنین در زمان یادگیری نمادهای عددی می‌تواند یادگیری را تسهیل کنند مهم هستند. نمادهای عددی شامل واژگان عدد[۱] (مانند سه) و عددنویسی هندو-عربی[۲] (مانند ۳) هستند.

چهار نوع سازه، مبنای موفقیت در ریاضیات است که عبارت‌اند از: سازه‌های ویژه-دامنه[۳]، کل-دامنه[٤]، غیرشناختی و محیطی. سازه‌های ویژه-دامنه مانند شمارش و حساب، مختص ریاضی هستند اما به تنهایی کافی نیستند و سازه‌های کل-دامنه مانند حافظه کاری[۵]، کارکردهای اجرایی[٦]، زبان و توانایی فضایی[۷] هم برای یادگیری ریاضی ضروری هستند. در کنار این دو نوع از سازه‌ها موضوعاتی مانند هیجان، اضطراب، چگونگی محیط خانه و مدرسه نیز قابل توجه است (Leibovich & Ansari, 2017). متأسفانه در آموزش ریاضیات (به ویژه در دوره پیش از دبستان و دبستان که از اهمیت بسیاری برخوردار است) به همه سازه‌ها پرداخته نمی‌شود. در تبیین یادگیری تحلیل ریاضیاتی، مبتنی بر تلفیق رویکرد راسلیِ تحلیل (که متمرکز بر ریاضیات نمادین است) و یافته‌های علوم اعصاب شناختی، لازم است که هر چهار سازه مهم در یادگیری ریاضیات نمادین و به ویژه اعداد نمادین مورد توجه قرار گیرد.

## تحلیل یادگیری ریاضیات نمادین

به منظور تحلیل عصب-فلسفی یادگیری ریاضیات نمادین، نیازمند مشخص کردن گزاره‌های مشاهده‌ای هستیم. سه گزاره از یافته‌های علوم اعصاب شناختی پیرامون یادگیری نمادین ریاضی استنباط شده است تا توان پاسخگویی هر کدام از آن‌ها در برابر پرسش‌های پژوهش آزموده شود. این گزاره‌ها از نتایج پژوهش‌های انصاری و همکارانش در دو دهه اخیر، استنتاج شده است.

1. Number Words
2. Hindu-Arabic Numerals
3. Domain-Specific
4. Domain-General
5. Working Memory
6. Executive Functions
7. Spatial Abilities

**گزاره مشاهده‌ای اول: مغز به دنبال یادگیری نمادین اعداد تغییر می‌کند**

یادگیری عدد، سنگ بنای یادگیری ریاضیات و سرآغاز تحلیل مبتنی بر نمادهاست. اما نماد عددی چیست و چگونه آن را می‌آموزیم؟ آیا همه افراد درک واحدی از معنای نمادهای عددی دارند؟ انسان چگونه می‌تواند چنین دانشی را که از ابتدا برایش موجود نبوده فرابگیرد و چرا این چنین در جوامع انسانی فراگیر است؟ دانش ارقام عربی[1] یکی از سازه‌های لازم برای پردازش عدد است که به نگاشت کلامی-عربی[2] (یک-۱) و پردازش مقادیر نمادین و تمیز دادن دو مقدار نمادین بازمی‌گردد (Bartelet, Ansari, Vaessen, & Blomert, 2014). دانش عددی نمادین وابسته به مکانیسم‌های شناسایی[3] و عدد اصلی[4] (تعداد آیتم‌های یک مجموعه) و ترتیبی[5] (زنجیره ارقام مرتبط) است. در این میان پردازش ترتیبی نقش برجسته‌تری در شناخت نمادین عدد دارد (Goffin & Ansari, 2016; Merkley & Ansari, 2016). لیون و انصاری کارآمدی کودکان در ارزیابی ساده‌ترین زنجیره‌های مرتب (مانند ۲،۳،۴) را بنیادی برای پردازش نمادین عددی در آن‌ها دانسته‌اند که به پردازش ریاضی پیچیده‌تر کمک می‌کند (Lyons & Ansari, 2015).

توانایی یادگیری و نمایش و دست‌کاری نمادهای عددی و انجام و ابداع ریاضیات انتزاعی؛ تفاوت برجسته انسان از دیگر انواع است (Dehaene, 2011; Hawes & Ansari, 2020; Sokolowski, 2019). ارقام هندو-عربی، در اغلب کشورهای جهان و نشان‌گذاری چینی[6] اسباب این پردازش‌ها هستند. پردازش ارقام هندو-عربی، شیار درون آهیانه‌ای[7] چپ و نشان‌گذاری چینی؛ شیار درون آهیانه‌ای راست را فعال می‌کند (Holloway, Battista, Vogel, & Ansari, 2013). وجود نواحی مغزی مختلف برای پردازش این نمادها، نشان از اثر عمیق فرهنگ بر نمادسازی و چگونگی پردازش نمادها در مغز دارد. چگونگی اختصاص یافتن این نواحی مغزی به پردازش نمادین عدد قابل‌تأمل است. پژوهش‌های بسیاری در تلاش هستند تا مشخص کنند که فعال شدن این نواحی و ظهور مکانیسم‌های مغزی برای خواندن و نوشتن و عملیات ریاضی؛

---

۱. منظور از دانش ارقام عربی عبارت است از دانش کار با ارقام ۱،۲،۳،... . از آنجایی که نمادهای نشان‌دهنده این ارقام را دانشمندان، به زبان عربی به جهان عرضه کردند؛ در بین ریاضیدانان به ارقام عربی مشهورند. گاهی نیز به عنوان ارقام هندو-عربی مطرح می‌شوند.

2. Verbal–Arabic Matching
3. Identification
4. Cardinality
5. Ordinality
6. Chinese Numerical Ideographs
7. Intraparietal Sulcus (IPS).

مغز دارای چهار لوب است که عبارت‌اند از: لوب پیشانی، لوب آهیانه‌ای، لوب گیجگاهی و لوب پس‌سری. شیار درون آهیانه‌ای یکی از بخش‌های لوب آهیانه‌ای است.

پدیده‌ای فلوژنیک[1] (حاصل تکامل مغز) است یا انتوژنیک (حاصل تحول[2]). تکامل جریانی غیرارادی و طبیعی بر بستر تاریخی طولانی است؛ اما تحول جریانی ارادی است که پیوستگی زیادی با فرهنگ دارد. تکامل از چالش‌های نوع انسان برای حل مسائل مرتبط با نیازهای طبیعی پدیدار می‌شود و تحول، پیامد تلاش انسان در طول زندگی‌اش برای حل مسائل وابسته به فرهنگ است.

برخی از سیستم‌ها و مکانیسم‌های مغزی پردازش عدد، حاصل تکامل‌اند اما ازآنجایی‌که کارکردهایی مانند خواندن و نوشتن و عددنویسی و استفاده از نمادها، وابسته به فرهنگ و ابزارهای ذهنی ایجاد شده به واسطه فرهنگ هستند (Ansari, 2008, 2012, 2016; Price & Ansari, 2011; van Atteveldt & Ansari, 2014)، تنها بر مدارهای نورونی ویژه‌ی تکاملی تکیه ندارند (van Atteveldt & Ansari, 2014). مطالعات مبنایی در حوزه‌های عصبی پردازش عددی-مقداری[3] توانسته است گام‌های آغازین را برای آشکارسازی چگونگی تعاملات بین مبانی تکاملی و مبانی تحولی یادگیری و فرهنگ‌آموزی[4] بردارد (Ansari, 2008; Zebian & Ansari, 2012)؛ ازاین‌رو علوم اعصاب فرهنگی[5] برای علوم تربیتی اهمیت پیدا می‌کند. این در حالی است که بررسی چگونگی پردازش و تحلیل و یادگیری نمادها و همچنین انتخاب و تغییر راهبردهای تربیتی از یک فرهنگ و زبان به فرهنگ و زبانی دیگر می‌تواند متفاوت باشد (van Atteveldt & Ansari, 2014).

ازآنجایی‌که سیستم عددنویسی در کشور ما شباهت زیادی با سیستم عددنویسی کشورهای انگلیسی‌زبان دارد؛ می‌توان بسیاری از نتایج پژوهش‌های آن‌ها را پیرامون پردازش نمادین عدد مورد استفاده قرار داد. بر اساس آنچه بیان شد، نمادهای عددی با وجود این که ساخته منحصربه‌فرد انسان و وابسته به فرهنگ هستند، بی‌بنیاد نیستند. زمینه‌های خلق نمادها، در طول تاریخ و مبتنی بر تکامل مغز ایجاد شده‌اند و درنهایت در دوران شکوفایی فرهنگی انسان خردمند و بر اساس آزمون‌وخطا ایجاد شده‌اند. آگاهی کودکان از جریان ساخت نمادهای عددی می‌تواند بینشی به آن‌ها ببخشد که بر اساس آن اعتمادبه‌نفس لازم را برای ارائه ایده‌های خود به دست آورند؛ چراکه بر این اساس ریاضیات ساختنی است.

مغز ویژگی شکل‌پذیری جالبی دارد که زمینه‌ساز یادگیری است (Blakemore & Frith, 2005). یادگیری نمادهای عددی، بر مبنای ویژگی شکل‌پذیری برخاسته از فرهنگ، باعث تغییر در مغز می‌شود. این

1. Phylogenetic
2. Development
3. Numerical-Magnitude Processing
4. Enculturation
5. Cultural Neuroscience

تغییر شامل هماهنگ شدن مکانیسم‌های موجود با کارکردهای جدید و ایجاد شبکه‌های مغزی جدید برای پردازش ریاضیات نمادین است (Ansari, 2012, 2016). کودکان به واسطه یادگیری می‌آموزند که چه نمادهایی نشان از عدد دارند و این‌گونه، نمادهای عددی در مغز، شبکه‌های ویژه خود را می‌یابند (Yeo, Pollack, Merkley, Ansari, & Price, 2020). کودکان از دو واژه «سه» و «سرو»، پیش از یادگیری نمادها، درک کاملاً متفاوتی ندارند و هر دو را به عنوان واژه می‌بینند اما پس از یادگیری نمادها، نواحی مغزی متفاوتی برای پردازش این دو واژه فعال می‌شود. یادگیری نمادهای عددی به کودکان کمک می‌کند تا پردازش معنایی جدیدی را تجربه کنند. پیش از یادگیری نمادهای عددی نیاز به بازگردانی و ترجمان وجود ندارد اما پس از آن، به صورتی پیاپی، تصاویر و مفاهیم به نمادها و نمادها به تصاویر و مفاهیم تبدیل می‌شوند و بدین ترتیب بنیان توانایی تحلیل بنا گذاشته می‌شود.

اما چگونه می‌توان از فهم درست نمادهای عددی در کودکان اطمینان یافت؟ آیا همه کودکان این نمادها را به یک شکل درک می‌کنند؟ چگونه می‌توان آموزش نمادها را با زمینه تاریخی ساخت عدد همراه کرد؟ با توجه به فرهنگ بومی خود و درحالی‌که تبیین تکامل مغز برای برخی بزرگ‌سالان نیز دشواری‌هایی دارد؛ چگونه و در چه سطحی می‌توان تاریخ تکامل مغز را برای کودکان تبیین کرد؟

**گزاره مشاهده‌ای دوم: پردازش اعداد نمادین و اعداد غیرنمادین به صورتی ناهمسان است و ارتباطی مبهم و دوسویه بین آن‌ها وجود دارد**

آیا تفکر تحلیلی در ریاضیات با یادگیری نمادهای عددی و بدون هیچ پیش‌زمینه‌ای آغاز می‌شود؟ چگونه می‌توان فرآیند تفکر تحلیلی مبتنی بر نمادها را تسهیل کرد؟ چگونه می‌توان زمینه‌ی یادگیری بهتر آن را فراهم کرد؟ پیش از یادگیری نمادهای عددی، مفهوم عدد به عنوان کمیتی تقریبی در کودکان وجود دارد که به دست‌کاری این مفاهیم، پردازش غیرنمادین گفته می‌شود؛ این در حالی است که پیرامون چگونگی ارتباط بین پردازش نمادین و غیرنمادین[1] اتفاق نظر وجود ندارد.

بررسی چگونگی پردازش نمادها و کمیت‌ها نشان از آن دارد که با وجود شباهت‌هایی در پردازش نمادین و غیرنمادین، بین این دو نوع پردازش ارتباط مستقیمی وجود ندارد و باهم متفاوت هستند (De Smedt, Noël, Gilmore, & Ansari, 2013; Lyons, Nuerk, & Ansari, 2015; Sokolowski, 2019).

---

۱. منظور از اعداد غیرنمادین عبارت است از مفهومی از مقدار که در غالب نمادین در نیامده است. مثلاً حیوانات و کودکان پیشاکلامی، مفهومی از «سه و پنج چیز» در ذهن دارند که حالت تقریبی دارد و بر این اساس تشخیص می‌دهند که پنج سیب بیشتر از سه سیب است در حالی که نه شمارش می‌دانند و نه می‌توانند این تعداد را در قالب نماد گفتاری «پنج- سه» یا در قالب نماد هندو-عربی «۵-۳» درآورند.

مسئله‌های ریاضیِ نیازمند به داوری[1](Holloway, Price, & Ansari, 2010) و مسئله‌های ریاضی مرتبط با چندی‌ها[2] در نوعِ نمادین و غیرنمادین (Lyons, Ansari, & Beilock, 2015) متفاوت پردازش می‌شوند. نمادها و کمیت‌ها، نواحی مغزی مجزایی در شبکه پیشانی-آهیانه‌ای[3] را درگیر می‌کنند (Sokolowski, 2019; Sokolowski, Fias, Mousa, & Ansari, 2017). شیار درون آهیانه‌ای چپ نقش حیاتی در داربست تحولی پردازش نمادین عدد دارد که پیامد فرهنگ‌آموزی است (Bugden, Price, McLean, & Ansari, 2012). از نگاه تکاملی و تحولی؛ پردازش غیر نمادین مقدار عددی، با یک سیستم مبنایی از بازنمایی مقدار ارتباط دارد. پردازش نمادین مقدار عددی به زمینه و سواد[4] فرد وابسته است و جنبه‌ای انتوژنیک (تحولی) دارد (Zebian & Ansari, 2012). درواقع خاستگاه پردازش نمادها و کمیت‌ها و سیر تحولی آن‌ها در انسان متفاوت است (Sokolowski, 2019; Xenidou-Dervou, Molenaar, Ansari, van der Schoot, & van Lieshout, 2017). انسان برای زنده ماندن و برطرف کردن نیازهای ضروری خود به پردازش غیرنمادین مقادیر پرداخته است اما استفاده از نمادها چیزی بیشتر از رفع نیازهای اولیه بوده است. نه‌تنها خاستگاه پردازش نمادین و غیر نمادین بلکه در چگونگی تحول و مدارهای عصبی آن‌ها نیز تفاوت‌های قابل‌توجهی وجود دارد.

باوجود تفاوت‌هایی در پردازش نمادین و غیرنمادین؛ این دو شیوه پردازش باهم کاملاً بی‌ارتباط نیستند. هالوی و همکاران، سیستم بازنمایی غیرنمادین عدد را، در کنار پیوستاری تکاملی و بنیادی تحولی، چارچوبی برای بازنمایی نمادین دانسته‌اند (Holloway et al., 2013) اما هاچسن و همکاران، پردازش غیرنمادین را تنها در دامنه سواد بداهه ریاضی[5] مؤثر در بازنمایی نمادین می‌دانند[6] (Hutchison, Ansari, Zheng, De Jesus, & Lyons, 2020). انسان یک، دو و سه نقطه یا شیء را بدون نیاز به شمارش می‌فهمد (Dehaene, 2014). بر این اساس پندارهای به دور از نماد کودکان از عدد، زمینه‌ساز فهم ساده و غیرارادی از نمادهای عددی است. تحلیل ریاضیاتی (بر بنیان دست‌کاری نمادها) نیازمند آگاهی و شناخت است و به چیزی فراتر از پاسخ‌های بداهه محور نیاز دارد. نقش مکانیسم‌های شناختی کل-دامنه مانند کنترل شناختی[7] و توجهی، در ارتباطِ بین پردازش نمادین و غیرنمادین اساسی است.

کنترل شناختی می‌تواند به نگاشت بین نماد و معنا منجر شود (Leibovich & Ansari, 2016) و

1. Judgments
2. Numerosities
3. Fronto-Parietal Network
4. Literacy
5. Subitizing Range

۶. سواد بداهه ریاضی به پردازش و فهم ناآگاهانه اعداد اشاره دارد

7. Cognitive Control

میانجی‌گری مکانیسم‌های توجه برای پردازش ارقام هندو–عربی در شیار گیجگاهی فوقانی جانبی[1] ضروری است (Yeo et al., 2020). از سویی دیگر، یادگیری نمادها (واژگان عددی) بر چگونگی مفهوم‌سازی کودکان از کمیت‌ها اثر می‌گذارد (Sokolowski, 2019). بر اساس این نتایج می‌توان گفت که ارتباط دوسویه و غیرمستقیم بین پردازش نمادین و غیر نمادین وجود دارد. ارتباط دوسویه از آن‌سوست که هر کدام به دیگری معنا می‌بخشند. هنگامی که کودکان تعدادی از اشیاء یا تصاویری از آن‌ها را می‌بینند نماد عددی را تصور می‌کنند. همچنین هنگامی که نمادها را می‌بینند یا می‌شنوند اشیای متناظر با تعداد مرتبط با نماد را تصور می‌کنند. ارتباط غیرمستقیم آن‌ها نیز از آن‌سوست که برای نگاشت مفهومی اعداد نمادین یا غیر نمادین نیازمند توجه و شناخت دیگری هستیم. پردازش‌های شناختی کل–دامنه، واسطه ایجاد این ارتباط غیرمستقیم هستند. در کنار ارتباط دوسویه و غیرمستقیم، بین پردازش نمادین و غیر نمادین، شباهت‌هایی نیز وجود دارد.

پژوهش‌های عصب– شناختی[2] پیرامون فهم عدد در نوزادان مشخص کرده است که آن‌ها به واسطه سیستم تفرد موازی[3] (در هنگام کار با مجموعه‌های کوچک) و سیستم تقریبی عدد[4] (در هنگام کار با کمیت‌–های بزرگ) می‌توانند به پردازش اطلاعات کمی بپردازند (Leibovich & Ansari, 2017). در دامنه بداهه، کودکان بدون شمارش، تعداد را تشخیص می‌دهند اما با بیشتر شدن تعداد و پیش از یادگیری نمادهای عددی بر مبنای سیستم تقریبی عدد به حدس زدن تقریبی روی می‌آورند. این تقریب زدن تنها به هنگام پردازش غیرنمادین نیست. هالووی بر این باور است که هنگام تقریبی بودن پردازش نمادین نیز سیستم تقریبی مقدار نقش دارد (Holloway et al., 2013). هنگامی که کودکان به نمادهای عددی می‌نگرند؛ برای تحلیل آن‌ها، علاوه بر پردازش دیداری (غیرمعنایی[5]) پردازش معنایی[6] نیز صورت می‌گیرد. آن‌ها بر اساس پردازش دیداری، نمادها را با هم مقایسه می‌کنند و بر اساس پردازش معنایی می‌توانند آن‌ها را به کمیت‌ها نسبت دهند. لبوویچ و انصاری چگونگی یافتن مصداق معنایی برای نمادهای عددی در زمینه شناخت عددی را «مشکل برخاسته از نماد» نامیده‌اند (Leibovich & Ansari, 2016). برخی از نظریه‌پردازان بر آن شدند که با قرار دادن بازنمایی‌های نمادین بر بنیاد بازنمایی‌های غیرنمادین این مشکل را حل کنند و برخی دیگر ارتباط کامل بین این دو را رد کرده‌اند.

1. Posterior Inferior Temporal Gyrus (pITG)
2. Neurocognitive
3. Parallel Individuation
4. Approximate Numbers System (ANS)
5. Asemantic
6. Semantic Processing

با پذیرفتن ANS (سیستم تقریبی غیرنمادین، زیستی، ماحصل تاریخ تکامل و از پیش موجود) به عنوان بنیانی برای درک معنای نمادهای عددی توسط کودکان (Matejko & Ansari, 2016; Sokolowski, 2019) این مشکل به صورت کامل قابل‌حل نیست (Leibovich & Ansari, 2016; Sokolowski, 2019)؛ چراکه نشان داده شده است که مهارت‌های پردازش نمادین و غیرنمادین عدد، خط سیرهای تحولی مجزا دارند و غیر همپوشان هستند (Matejko & Ansari, 2016) و پیوند پردازش نمادین و غیرنمادین حتی پس از آنکه کودکان، معنای نمادین عدد را دریافت کردند نیز ادامه دارد (Hutchison et al., 2020). بنابراین نیاز است تا فهم بیشتری از چگونگی نگاشت بازنمایی‌های خارجی به داخلی در پردازش نمادین و غیرنمادین اعداد و مکانیسم‌های متضمن بازنمایی نمادین عدد و تغییرات تحولی کنترل شناختی در سنین رشد کودکان و نوجوانان برای فهم اثر متقابل تربیت و بلوغ مغز (Goffin, Vogel, Slipenkyj, & Ansari, 2020; Holloway et al., 2010; Morton, Bosma, & Ansari, 2009) و روابط فضایی-عددی[1] و شرایط خاصی که مکانیسم‌ها کار می‌کنند یا نمی‌کنند (Hawes & Ansari, 2020) به دست آید.

ارتباط پیچیده‌ی بین نمادهای عددی و معنای تقریبیِ غیرنمادین آن‌ها، توجه به هر دو را برای تسهیل یادگیری تحلیل ریاضیاتی مبتنی بر نمادها ضرورت می‌بخشد. با وجود تمام اختلاف‌نظرها، به دلیل اهمیت سیستم‌های زیستی عدد، نیازمند توجه و بهبود عملکرد کودکان در ریاضیات غیرنمادین هستیم تا بتوان زمینه‌های لازم برای یادگیری تحلیل نمادین را فراهم کنیم. اما چه عواملی بر برقراری ارتباط بین ریاضیات نمادین و غیرنمادین اثر می‌گذارند؟ چگونه می‌توانیم راهبردهای مؤثری جهت زمینه‌سازی برای ایجاد این ارتباط، با توجه به فرهنگ و شرایط آموزش پیش از دبستان در کشورمان اجرا کنیم؟

**گزاره مشاهده‌ای سوم: دانش نمادین عدد نقش مهمی در پیشرفت‌های آینده کودکان در ریاضیات سطح بالاتر دارد**

آیا فهم نمادها در کودکی زمینه‌ساز فهم نمادها در بزرگ‌سالی است؟ کشف، تخمین و دست‌کاری نمادها از شروع یادگیری آن‌ها در کودکی تا بزرگ‌سالی چه تغییراتی می‌کند؟ یادگیری تحلیل ریاضیاتی مبتنی بر نمادها تا چه اندازه می‌تواند به یادگیری تفکر تحلیلی منجر شود؟ با استفاده از بررسی پردازش‌های مبنایی مانند پردازش‌های ارادی و خودکار و تعامل بین مهارت‌های ویژه-دامنه با مکانیسم‌های کل-دامنه در طول یادگیری و تحول کودکان می‌توان تفاوت‌های فردی آنان را در مهارت‌های ریاضیات بررسی کرد (Ansari et al., 2012b; Ansari, Grabner, Koschutnig, Reishofer, & Ebner, 2011; Bugden & Ansari, 2011). مهارت‌های مقایسه‌ی مقدار نمادین می‌تواند ابزار غربالگری برای شناسایی کودکان دارای

1. Spatial-Numerical Relations

مشکلات ریاضی و حساب نارسایی باشد (Holloway & Ansari, 2009; Vanbinst, Ansari, Ghesquière, & De Smedt, 2016; Xenidou-Dervou et al., 2017). بر اساس این ویژگی‌ها می‌توان کودکانی را که در ریاضیات مبنایی مشکل‌دارند و یا احتمال دارد در آینده دچار مشکل شوند و حتی نوابغ را شناسایی کرد. در این زمینه سه مسئله باید مورد توجه قرار گیرد: این شناسایی توسط چه کسانی باید انجام شود؟ این شناسایی چه پیامدهایی برای کودکان دارد؟ هدف از این شناسایی و تلاش برای رفع مشکلات دانش‌آموزان پیرامون فهم نمادهای عددی و ریاضیاتی چیست؟ بررسی پیامدهای این شناسایی برای کودکان و جایگاه دانش نمادین و تحلیل ریاضیاتی در هر جامعه‌ای نیازمند کنکاش است. بررسی سازه‌های ویژه-دامنه، مانند تحلیل نمادهای عددی، در کنار سازه‌های کل-دامنه و غیر شناختی و محیطی نتایج اثربخش‌تری دارد.

نقش عصب-روانشناسان در این زمینه اهمیت بالایی دارد؛ اما یکی از بزرگ‌ترین افسانه‌های عصبی این است که علوم اعصاب می‌تواند همه مشکلات یادگیری در کودکان را حل کند. حتی در صورت رخداد انقلابی در یافته‌های تجربی نیز به همکاری سه ضلع والدین-معلمان-روانشناسان حول یادگیری کودکان نیاز داریم. یکی دیگر از افسانه‌های عصبی این است که باید محیطی سرشار از محرک‌ها برای نوزادان و کودکان فراهم کنیم تا مغز آن‌ها در روند یادگیری فعال‌تر شود. این فرضیه توسط پژوهش‌هایی رد شده است (Blakemore & Frith, 2005) اما اثرات آن هنوز در جوامع باقی مانده است. توجه به کودکان و زیر نظر داشتن مداوم آن‌ها پویایی و سرشاری کودکی را از آن‌ها می‌گیرد.

دریافت عددی[1] (درک شهودی انسان از عدد) شامل دو نوع پردازش ارادی و خودکار مقدار عددی است که می‌تواند تبیین‌کننده چگونگی تغییر بازنمایی و پردازش مقدار عددی در جریان تحول باشد. پردازش ارادی، پیش‌بینی کننده عملکرد کودکان در آزمون‌های استاندارد پیشرفت ریاضی است (Bugden & Ansari, 2011). از سوی دیگر پردازش غیرارادی و ساده از نمادها تحت تأثیر پردازش‌های غیرنمادین است؛ اما آنچه در بالا بردن توانایی و تفکر تحلیلی ریاضیاتی اثر دارد پردازش و دست‌کاری ارادی نمادهاست. یادگیری تحلیل ریاضیاتی، مبتنی بر نمادها، نیازمند آن است که ابتدا چگونگی تشخیص و مقایسه و معنای نمادها فراگرفته شوند و سپس از آن‌ها در تحلیل مسائل ریاضی استفاده شود. ساختار مغز هر انسان نیز در چگونگی و سطح یادگیری تحلیل ریاضیاتی اثر دارد. برخی از توانایی‌های ریاضیاتی با مطالعه ساختار و کارکردهای مغز افراد قابل پیش‌بینی است. هرچند که این پیش‌بینی به دلیل وجود سیستم پیچیده‌ای از تعاملات بین سازه‌های ویژه-دامنه، کل-دامنه، هیجانی و محیطی؛ کاملاً حالتی احتمالی دارد.

1. Number Sense

قشر آهیانه‌ای و پیشانی برای پردازش عددی مهم هستند (Sokolowski et al., 2017). فعال شدن قشر پیشانی در هنگام عملکرد حساب به مکانیسم‌های کنترل مانند فراشناخت اشاره دارد (Bellon, Fias, Ansari, & De Smedt, 2020). همچنین بین تغییرات تحولی کنترل شناختی و تغییرات کارکرد قشر پیش پیشانی[1] ارتباط وجود دارد (Morton et al., 2009). درنتیجه‌ی ارتباط بین قشر پیش پیشانی جانبی[2] و اجرای کنترل شناختی؛ هشیاری بیشتری نسبت به اشتباهات محاسبه و کنترل بیشتری نسبت به ارتکاب خطاها در افرادی با شایستگی ریاضی نسبتاً بالا وجود دارد (Ansari, Grabner, et al., 2011). شبکه پیشانی-آهیانه‌ای در هنگام استفاده از راهبردهای رویه‌ای به صورت گسترده‌ای فعال می‌شود (Grabner et al., 2009). قشر پیشانی آخرین قسمت مغز است که از تغییر و تحول بازمی‌ایستد. این قشر با آغاز نوجوانی، شروع به شکوفایی می‌کند و بر این اساس به شدت در تحول خود به یادگیری وابسته است (Blakemore & Frith, 2005) و با پردازش‌های هیجانی و تفکر اجتماعی (Damasio, 2006) و سطوح بالای آگاهی[3] و فراشناخت (Dehaene, 2014) در ارتباط است.

هدف از تحلیل فلسفی دستیابی به فهم ژرف و از بین بردن زمینه‌های ایجاد ابهام و خطا است (Beaney, 2013; Daly, 2010). تحلیل نمادها نیز نیازمند آگاهی بر درستی یا خطای فهم و دست‌کاری آن‌ها است؛ به‌عبارت‌دیگر در تحلیل ریاضیاتی نوعی فراشناخت نیاز است که نشان از آگاهی بر رویه‌ها دارد. تحلیل فلسفی و تحلیل ریاضیاتی، چه از نظر مفهومی و چه از نظر کاربردی، بسیار به‌هم‌پیوسته‌اند. در تحلیل فلسفی تلاش بر آشکار ساختن مفاهیم و مضامین اصلی و پنهان و ساده‌سازی عبارات پیچیده با استفاده از ترجمان آن‌ها به زبانی صوری است و در تحلیل مسائل ریاضی نیز مفاهیم به صورت نمادین برگردان می‌شوند تا با ساده کردن مسئله، امکان حل آن فراهم شود. به‌عبارت‌دیگر در هر دو تحلیل فلسفی و تحلیل ریاضیاتی تلاش بر پیشگیری از خطاست. از سوی دیگر بین کارآمدی کودکان در پردازش نمادها و پیشرفت ریاضیاتی ارتباط وجود دارد (Bartelet, Vaessen, Blomert, & Ansari, 2014; De Smedt et al., 2013). مهارت-های نمادین سبب افزایش فعالیت مغز در شیار درون آهیانه‌ای می‌شوند. این شیار نقش مهمی در پردازش‌های ویژه-دامنه مانند دست‌ورزی‌های کمی و در توانایی‌های کل-دامنه مانند حافظه کاری دیداری-فضایی دارد (Matejko & Ansari, 2017). آموزش مهارت‌های نمادین (شناسایی، عدد اصلی، ترتیبی) می‌تواند بنیادهای ریاضیاتی قوی‌تر برای موفقیت آینده کودکان در ریاضیات را فراهم کند (Merkley & Ansari, 2016; Xenidou-Dervou et al., 2017). این مهارت‌ها با استفاده از بازی‌های تخته‌ای و کامپیوتری افزایش می‌یابند

1. Prefrontal Cortex Functioning
2. Lateral
3. Consciousness

(De Smedt et al., 2013). استفاده از راهبردهای رویه‌ای در بازی‌ها می‌تواند به تقویت فهم کودکان از نمادها و بالا رفتن توانایی تحلیل در حل مسائل ریاضی منجر شود. همچنین هنگامی می‌توان از طریق یادگیری تحلیل به یادگیری تفکر ریاضیاتی دست یافت که بتوان ریاضیات رسمی و مدرسه‌ای را به واسطه نمادها، به گونه‌ای معنادار به ریاضیات غیررسمی پیوند زد.

پژوهش‌ها نشان داده‌اند که داشتن شایستگی‌های ریاضیاتی نقش مهمی در موفقیت زندگی روزمره و آکادمیک در جهان امروز دارد (Alcock et al., 2016; Ansari, De Smedt, & Grabner, 2012a; Matejko, Price, Mazzocco, & Ansari, 2013). یادگیری تحلیل ریاضیاتی، به عنوان یکی از جنبه‌های تفکر ریاضیاتی، می‌تواند در بهبود شایستگی‌های ریاضیاتی نقش‌آفرین باشد. تحلیل، زمانی برای تفکر ریاضیاتی تبدیل به یک رویه می‌شود که بر اثر یادگیری و تمرین به حالتی خودکار برسد. هرچند که تحلیل نمادها و مفاهیم جدید نیازمند تلاشی آگاهانه است؛ اما تفکر تحلیلی هنگامی رویه زندگی می‌شود که خودکار و ناآگاهانه جریان یابد. همان‌گونه که بیان شد، روزمره شدن توانایی تحلیل با کارکرد قشر آهیانه‌ای و پیش پیشانی ارتباط دارد. هر مفهوم نمادین جدید، ابتدا در ناحیه پیش پیشانی پردازش شده و هنگامی که به عنوان مفهومی ریاضیاتی درک شد به قشر آهیانه‌ای منتقل می‌شود. از سوی دیگر، پیش پیشانی در فرآیندهای فکری سطح بالا مانند تفکر هیجانی و انتقادی بسیار مهم است و کارکردهای آن باید در جریان تربیت ساخته شوند. روزمره شدن تفکر تحلیلی نیازمند توجه به چگونگی پردازش نمادها و فرآیند تحلیل در کودکان و نوجوانان و کمک به آن‌ها برای رفع مشکلات یادگیری ناشی از زمینه‌های عصبی، تحولی، فرهنگی و اجتماعی است.

## نتیجه

هدف این پژوهش بررسی یادگیری تحلیل ریاضیاتی مبتنی بر تحلیل فلسفی و یافته‌های علوم اعصاب شناختی است. بدین منظور ابتدا ارتباط تحلیل و ریاضیات نمادین مورد بحث قرار گرفت و سپس با استفاده از روش تحلیل عصب-فلسفی به تبیین یادگیری تحلیل ریاضیاتی پرداخته شد. بر مبنای ارتباط تحلیل و ریاضیات نمادین، ازآنجایی‌که روش تحلیل آن‌چنان‌که مورداستفاده فیلسوف-ریاضیدانان است بر نمادها تکیه دارد؛ فرآیند یادگیری تحلیل ریاضیاتی، بر اساس یادگیری نمادها مورد توجه قرار گرفته است و ازآنجایی‌که نمادهای عددی، اولین نمادهای ریاضیاتی هستند که انسان فرامی‌گیرد و بنیانی برای یادگیری دیگر نمادها هستند مورد توجه ویژه این پژوهش بوده است. در این پژوهش بر اساس روش تحلیل عصب-فلسفی ابتدا از بررسی چگونگی یادگیری نمادها در کودکان بر مبنای پژوهش‌های علوم اعصاب شناختی،

سه گزاره مشاهده‌ای استنتاج شد. سپس سعی بر این بود تا بر مبنای این سه گزاره مشاهده‌ای به پرسش‌های فلسفی مطرح شده پاسخ داده شود.

بر مبنای گزاره مشاهده‌ای اول (یادگیری نمادین اعداد در کودکان مغز را تغییر می‌دهد) پرسش‌هایی پیرامون چیستی نمادهای عددی و چگونگی درک و یادگیری آن‌ها و اینکه چرا و چگونه چنین دانشی در جوامع انسانی فراگیر شده است مطرح شد. بر این اساس همراه شدن یادگیری اعداد نمادین با آگاهی کودکان از چگونگی ساخت عدد می‌تواند جسارت لازم برای نوآوری‌های عددی و ریاضیاتی را فراهم کند؛ زیرا بر این اساس هم معلمان و هم کودکان می‌پذیرند که توانایی‌های ریاضیاتی مانند خود ریاضیات ساختنی است و نه از پیش موجود.

بر مبنای گزاره مشاهده‌ای دوم (پردازش اعداد نمادین و اعداد غیرنمادین به صورتی ناهمسان است و ارتباطی مبهم و دوسویه بین آن‌ها وجود دارد) پرسش‌هایی پیرامون چیستی پیش‌زمینه‌های لازم برای تفکر تحلیلی در ریاضیات به واسطه یادگیری نمادهای عددی و چگونگی تسهیل فرآیند یادگیری تفکر تحلیلی مبتنی بر نمادها مطرح شد. بر این اساس تشویق کودکان به ایجاد ارتباط پیاپی بین نمادهای عددی و معنای ذهنی و بیان کلامی آن‌ها می‌تواند تحلیل عددی مبتنی بر نمادها را در آن‌ها بهبود بخشیده و زمینه‌ساز مهارت آن‌ها در تحلیل‌های سطح بالاتر ریاضیاتی شود.

بر مبنای گزاره مشاهده‌ای سوم (دانش نمادین عدد نقش مهمی در پیشرفت‌های آینده کودکان در ریاضیات سطح بالاتر دارد) پرسش‌هایی پیرامون چگونگی ارتباط فهم نمادها در کودکی با فهم نمادها در بزرگ‌سالی و تحولات توانایی تحلیل نمادین از کودکی تا بزرگ‌سالی و همچنین چگونگی ارتباط توانایی تحلیل ریاضیات نمادین مبنایی با توانایی تفکر تحلیلی بیان شد. بر این اساس ایجاد نوعی جریان یادگیری که مبتنی بر آگاهی از زمینه‌های زیستی و فرهنگی خلق نمادهای عددی باشد، می‌تواند مشکلات زمینه‌ای برخاسته از ناتوانی در تحلیل را برطرف کند و نویدبخش موفقیت‌های بعدی باشد. همچنین اسباب لازم برای غنای توانایی‌های فراشناختی مانند تشخیص خطاها (که به تحول مناسب و شایسته قشر پیش پیشانی وابسته است) را فراهم کند.

توانایی تحلیل ریاضیاتی مبتنی بر نمادهای عددی، یکی از بنیان‌های تحول ریاضیاتی است. پرداختن و توجه به این بنیان‌ها می‌تواند از یک سو راهکارهایی برای بهبود توانایی‌های شناختی و فراشناختی فراهم کند و از سوی دیگر با تمرکز بر سازه‌های هیجانی از پیامدهای منفی آموزش نادرست ریاضیات که اضطراب ریاضیاتی ازجمله آن‌هاست، بکاهد. تا زمانی می‌توان به تحول مناسب توانایی تحلیل ریاضیاتی امید داشت

که ریاضیات برای کودکان به نوعی دانش و توانایی دور از دسترس تبدیل نشده باشد و بر این اساس سال‌های اول ابتدایی اهمیت بسیاری خواهد داشت.

هنگامی که توانایی تحلیل نمادین در ریاضیات به واسطه یادگیری، به‌نوعی توانایی خودکار تبدیل شود، می‌تواند زمینه‌های افزایش سطح توانایی تحلیل و تفکر تحلیلی را فراهم کرد؛ به شرطی که هدف از آموزش ریاضیات کمک به بهبود توانایی تفکر استدلالی-هیجانی باشد؛ زیرا انسان به این سبب شروع به درک عدد و ساخت نمادهای عددی و ریاضیاتی کرد که بتواند کنترل بیشتری بر منابع بوم‌شناختی و اجتماعی خود داشته باشد. این هدف هیچ‌گاه نباید جای خود را به اهداف کوتاه‌مدتی مانند قبولی در امتحانات بدهد. توجه به اهداف آموزش ریاضی که برآمده از ماهیت انسان و نیازهای او باشد، از یک سو به تحول توانایی‌-های شناختی-هیجانی افراد و از سوی دیگر به پیشرفت صنعتی و اقتصادی منجر می‌شود.

در مسیر ایجاد چنین بستری برای یادگیری تحلیل ریاضیاتی، چالش‌هایی وجود دارد که هم توجه فیلسوفان تربیت و هم دانشمندان علوم اعصاب شناختی را می‌طلبد. مهم‌ترین چالش به چگونگی آشنایی معلمان و کودکان با نظریه تکامل بازمی‌گردد که هم برای معرفی ساخت عدد و هم برای یادگیری آن اهمیت دارد. لازم است تا این چگونگی با توجه به فرهنگ بومی ملل مورد بررسی قرارگیرد. دومین چالش، نوع راهبردهای لازم برای بهبود ارتباط درک معنایی و نمادین اعداد در کودکان کشورمان است که نیازمند بررسی داشته‌ها و بایسته‌هاست.

در نهایت نیز می‌توان ادعا کرد به دلیل اهمیت ناحیه پیش‌پیشانی مغز در فرآیندهای شناختی و هیجانی سطح بالا، ضروری است که آموزش ریاضیات از نظر سطح تأکید بر کارکردهای شناختی و فرآیندهای حل مسئله (که نیازمند تحلیل مبتنی بر نمادها هستند) بررسی شود تا میزان کارایی روش‌های آموزش حل مسئله و همچنین میزان توجه به سازه‌های کل-دامنه، ویژه-دامنه، هیجانی و محیطی تحول ریاضیاتی در آموزش ریاضیات نمادین آشکار شود.

## References


Alcock, L., Ansari, D., Batchelor, S., Bisson, M.-J., De Smedt, B., Gilmore, C., . . . Inglis, M. (2016). Challenges in mathematical cognition: A collaboratively-derived research agenda. *Journal of Numerical Cognition*, *2*(1), 20.

Amiel, J. J., & Tan, Y. S. M. (2019). Using collaborative action research to resolve practical and philosophical challenges in educational neuroscience. *Trends in neuroscience and education*, *16*, 100116.

Ansari, D. (2005). Paving the way towards meaningful interactions between neuroscience and education. *Developmental science*, *8*(6), 466.

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neuroscience, 9*(4), 278-291.

Ansari, D. (2012). Culture and education: new frontiers in brain plasticity. *Trends in Cognitive Sciences*, *16*(2), 93-95.

Ansari, D. (2016). Number symbols in the brain. In *Development of Mathematical Cognition* (pp. 27-50): Elsevier.

Ansari, D., & Coch, D. (2006). Bridges over troubled waters: Education and cognitive neuroscience. *Trends in Cognitive Sciences, 10*(4), 146-151.

Ansari, D., Coch, D., & De Smedt, B. (2011). Connecting Education and Cognitive Neuroscience: Where will the journey take us? *Educational philosophy and theory, 43*(1), 37-42.

Ansari, D., De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2012a). Introduction to the special section on. *Mind Brain and Education, 6*(3), 117-118.

Ansari, D., De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2012b). Neuroeducation–a critical overview of an emerging field. *Neuroethics, 5*(2), 105-117.

Ansari, D., Grabner, R. H., Koschutnig, K., Reishofer, G., & Ebner, F. (2011). Individual differences in mathematical competence modulate brain responses to arithmetic errors: An fMRI study. *Learning and Individual Differences, 21*(6), 636-643.

Bartelet, D., Ansari, D., Vaessen, A., & Blomert, L. (2014). Cognitive subtypes of mathematics learning difficulties in primary education. *Research in developmental disabilities, 35*(3), 657-670.

Bartelet, D., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). What basic number processing measures in kindergarten explain unique variability in first-grade arithmetic proficiency? *Journal of experimental child psychology, 117*, 12-28.

Beaney, M. (2013). *The Oxford handbook of the history of analytic philosophy*: Oxford University Press.

Beaney, M. (2020). Two dogmas of analytic historiography. *British journal for the history of philosophy, 28*(3), 594-614.

Bellon, E., Fias, W., Ansari, D., & De Smedt, B. (2020). The neural basis of metacognitive monitoring during arithmetic in the developing brain. *Human brain mapping, 41*(16), 4562-4573.

Bickle, J. (2019). Lessons for experimental philosophy from the rise and "fall" of neurophilosophy. *Philosophical Psychology, 32*(1), 1-22.

Blakemore, S.-J., & Frith, U. (2005). *The learning brain: Lessons for education*: Blackwell publishing.

Brault Foisy, L. M., Matejko, A. A., Ansari, D., & Masson, S. (2020). Teachers as orchestrators of neuronal plasticity: effects of teaching practices on the brain. *Mind, Brain, and Education, 14*(4), 415-428.

Bugden, S., & Ansari, D. (2011). Individual differences in children's mathematical competence are related to the intentional but not automatic processing of Arabic numerals. *Cognition, 118*(1), 32-44.

Bugden, S., Price, G. R., McLean, D. A., & Ansari, D. (2012). The role of the left intraparietal sulcus in the relationship between symbolic number processing and children's arithmetic competence. *Developmental Cognitive Neuroscience, 2*(4), 448-457.

Churchland, P. S. (1989). *Neurophilosophy: Toward a unified science of the mind-brain*: MIT press.

Churchland, P. S. (2017). Neurophilosophy. In D. L. Smith (Ed.), *How Biology Shapes Philosophy: New Foundations for Naturalism* (pp. 72-94): Cambridge University Press.

Clark, J. (2009). NEUROPHILOSOPHY, EDUCATION AND LEARNING. *The Philosophy of Education Society of Australasia*.

Clark, J. (2015). Philosophy, neuroscience and education. *Educational philosophy and theory, 47*(1), 36-46.

Daly, C. (2010). *An introduction to philosophical methods*: Broadview Press.

Damasio, A. R. (2006). *Descartes' error*: Random House.

De Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula-Sormunen, M., Schneider, M., & Verschaffel, L. (2011). Cognitive neuroscience meets mathematics education: It takes two to tango. *Educational Research Review, 6*(3), 232-237.

De Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula, M. M., Schneider, M., & Verschaffel, L. (2010). Cognitive neuroscience meets mathematics education. *Educational Research Review, 5*(1), 97-105.

De Smedt, B., Noël, M.-P., Gilmore, C., & Ansari, D. (2013). How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education, 2*(2), 48-55.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*: OUP USA.

Dehaene, S. (2014). *Consciousness and the brain: Deciphering how the brain codes our thoughts*: Penguin.

Dick, F., Lloyd-Fox, S., Blasi, A., Elwell, C., Mills, D., & Elwell, C. (2014). Neuroimaging methods. In D. Mareschal, B. Butterworth, & A. Tolmie (Eds.), *Educational neuroscience* (pp. 13-45).

Ernest, P. (2018). The ethics of mathematics: is mathematics harmful? In *The philosophy of mathematics education today* (pp. 187-216): Springer.

Gazzaniga, M. S. (2009). *The cognitive neurosciences*: MIT press.

Goffin, C., & Ansari, D. (2016). Beyond magnitude: Judging ordinality of symbolic number is unrelated to magnitude comparison and independently relates to individual differences in arithmetic. *Cognition, 150*, 68-76.

Goffin, C., Vogel, S. E., Slipenkyj, M., & Ansari, D. (2020). A comes before B, like 1 comes before 2. Is the parietal cortex sensitive to ordinal relationships in both numbers and letters? An fMRI-adaptation study. *Human brain mapping, 41*(6), 1591-1610.

Grabner, R. H., & Ansari, D. (2010). Promises and potential pitfalls of a 'cognitive neuroscience of mathematics learning'. *ZDM, 42*(6), 655-660.

Grabner, R. H., Ansari, D., Koschutnig, K., Reishofer, G., Ebner, F., & Neuper, C. (2009). To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. *Neuropsychologia, 47*(2), 604-608.

Gutstein, E. R. (2018). The struggle is pedagogical: Learning to teach critical mathematics. *The philosophy of mathematics education today*, 131-143.

Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*, 1-18.

Heis, J. (2017). Russell's Road to Logicism. In *Innovations in the History of Analytical Philosophy* (pp. 301-332): Springer.

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 62-101.

Holloway, I. D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology, 103*(1), 17-29.

Holloway, I. D., Battista, C., Vogel, S. E., & Ansari, D. (2013). Semantic and perceptual processing of number symbols: evidence from a cross-linguistic fMRI adaptation study. *Journal of Cognitive Neuroscience, 25*(3), 388-400.

Holloway, I. D., Price, G. R., & Ansari, D. (2010). Common and segregated neural pathways for the processing of symbolic and nonsymbolic numerical magnitude: An fMRI study. *Neuroimage, 49*(1), 1006-1017.

Hutchison, J. E., Ansari, D., Zheng, S., De Jesus, S., & Lyons, I. M. (2020). The relation between subitizable symbolic and non-symbolic number processing over the kindergarten school year. *Developmental science, 23*(2), e12884.

Kim, M., & Sankey, D. (2018). Philosophy, neuroscience and pre-service teachers' beliefs in neuromyths: a call for remedial action. *Educational philosophy and theory, 50*(13), 1214-1227.

Lagemann, E. C. (2002). *An elusive science: The troubling history of education research*: University of Chicago Press.

Leibovich, T., & Ansari, D. (2016). The symbol-grounding problem in numerical cognition: a review of theory, evidence, and outstanding questions. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale, 70*(1), 12.

Leibovich, T., & Ansari, D. (2017). Accumulation of non-numerical evidence during nonsymbolic number processing in the brain: An fMRI study. *Human brain mapping, 38*(10), 4908-4921.

Lyons, I. M., & Ansari, D. (2015). Numerical Order Processing in Children: From Reversing the Distance-Effect to Predicting Arithmetic. *Mind, Brain, and Education,* 9 (4), 207–221. In.

Lyons, I. M., Ansari, D., & Beilock, S. L. (2015). Qualitatively different coding of symbolic and nonsymbolic numbers in the human brain. *Human brain mapping, 36*(2), 475-488.

Lyons, I. M., Nuerk, H.-C., & Ansari, D. (2015). Rethinking the implications of numerical ratio effects for understanding the development of representational precision and numerical processing across formats. *Journal of Experimental Psychology: General, 144*(5), 1021.

Martens, E. (2003). *Methodik des Ethik-und Philosophieunterrichts: Philosophieren als elementare Kulturtechnik*: Siebert.

Matejko, A. A., & Ansari, D. (2016). Trajectories of symbolic and nonsymbolic magnitude processing in the first year of formal schooling. *PloS one, 11*(3), e0149863.

Matejko, A. A., & Ansari, D. (2017). How do individual differences in children's domain specific and domain general abilities relate to brain activity within the intraparietal sulcus during arithmetic? An fMRI study. *Human brain mapping, 38*(8), 3941-3956.

Matejko, A. A., Price, G. R., Mazzocco, M. M., & Ansari, D. (2013). Individual differences in left parietal white matter predict math scores on the Preliminary Scholastic Aptitude Test. *Neuroimage, 66*, 604-610.

Merkley, R., & Ansari, D. (2016). Why numerical symbols count in the development of mathematical skills: Evidence from brain and behavior. *Current Opinion in Behavioral Sciences, 10*, 14-20.

Morton, J. B., Bosma, R., & Ansari, D. (2009). Age-related changes in brain activation associated with dimensional shifts of attention: an fMRI study. *Neuroimage, 46*(1), 249-256.

Northoff, G. (2004). What is neurophilosophy? A methodological account. *Journal for general philosophy of science, 35*(1), 91-127.

Northoff, G. (2018). *The Spontaneous Brain: From the Mind–Body to the World–Brain Problem*: MIT Press.

Novaes, C. D., & Geerdink, L. (2017). The dissonant origins of analytic philosophy: Common sense in philosophical methodology. In *Innovations in the history of analytical philosophy* (pp. 69-102): Springer.

Paravicini, W., Schnieder, J., & Scharlau, I. (2018). Hades—The Invisible Side of Mathematical Thinking. In *The philosophy of mathematics education today* (pp. 353-364): Springer.

Price, G. R., & Ansari, D. (2011). Symbol processing in the left angular gyrus: evidence from passive perception of digits. *Neuroimage, 57*(3), 1205-1211.

Raizada, R. D., Tsao, F.-M., Liu, H.-M., Holloway, I. D., Ansari, D., & Kuhl, P. K. (2010). Linking brain-wide multivoxel activation patterns to behaviour: Examples from language and math. *Neuroimage, 51*(1), 462-471.

Richardson, M., Isaacs, T., Barnes, I., Swensson, C., Wilkinson, D., & Golding, J. (2020). Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2019: National report for England: Research report: December 2020.

Sokolowski, H. M. (2019). How Do Humans Process Magnitudes? An Examination of the Neural and Cognitive Underpinnings of Symbols, Quantities, and Size in Adults and Children.

Sokolowski, H. M., Fias, W., Mousa, A., & Ansari, D. (2017). Common and distinct brain regions in both parietal and frontal cortex support symbolic and nonsymbolic number processing in humans: A functional neuroimaging meta-analysis. *Neuroimage, 146*, 376-394.

Thomas, M. S., Ansari, D., & Knowland, V. C. (2019). Annual research review: Educational neuroscience: Progress and prospects. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 60*(4), 477-492.

van Atteveldt, N., & Ansari, D. (2014). How symbols transform brain function: A review in memory of Leo Blomert. *Trends in Neuroscience and Education, 3*(2), 44-49.

van der Meulen, A., Krabbendam, L., & de Ruyter, D. (2015). Educational neuroscience: Its position, aims and expectations. *British Journal of Educational Studies, 63*(2), 229-243.

Vanbinst, K., Ansari, D., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2016). Symbolic numerical magnitude processing is as important to arithmetic as phonological awareness is to reading. *PloS one, 11*(3), e0151045.

Xenidou-Dervou, I., Molenaar, D., Ansari, D., van der Schoot, M., & van Lieshout, E. C. (2017). Nonsymbolic and symbolic magnitude comparison skills as longitudinal predictors of mathematical achievement. *Learning and Instruction, 50*, 1-13.

Yeo, D. J., Pollack, C., Merkley, R., Ansari, D., & Price, G. R. (2020). The "Inferior Temporal Numeral Area" distinguishes numerals from other character categories during passive viewing: A representational similarity analysis. *Neuroimage*, 116716.

Zebian, S., & Ansari, D. (2012). Differences between literates and illiterates on symbolic but not nonsymbolic numerical magnitude processing. *Psychonomic Bulletin & Review, 19*(1), 93-100.